

BAND-LIMITED SIGNAL EXTRAPOLATION USING LEAST SQUARES APPROXIMATION BY PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS

Ondrej Mihálik

Master Degree Programme (2), FEEC BUT

E-mail: xmihal06@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Pavel Jura

E-mail: jura@feec.vutbr.cz

Abstract: This paper is concerned with the band-limited signal extrapolation using a truncated series of Prolate spheroidal wave functions. Our aim is to investigate the extent to which it is possible to extrapolate signal from its samples taken in a finite interval. It is often believed that this extrapolation method depends on computing definite integrals. We show an alternative approach by using the least squares method. We briefly discuss performance of these two methods in the presence of noise and the possibility of using this algorithm for real-time data processing. Finally the extrapolation algorithm is tested with real data from a microphone array.

Keywords: Prolate spheroidal wave functions, extrapolation, Fourier transform, band-limited signals, spectrum, orthogonality, least squares

1 ÚVOD

V dnešnej dobe sa každodenne stretávame s digitálnymi signálmi. Zaznamenaný signál je vždy konečný a známy len v okamihoch vzorkovania. Ak nás zaujíma jeho frekvenčné spektrum, musíme o chýbajúcej časti signálu urobiť nejaký dodatočný predpoklad – pri výpočte Fourierovho radu predpokladáme, že sa signál periodicky opakuje na celej reálnej osi času, pri Fourierovom integrále zasa predpokladáme, že chýbajúci úsek signálu je nulový. Vo všeobecnosti oba predpoklady vedú ku vzniku skokov na okrajoch intervalu pozorovania a spektrum takto dodefinovaného signálu obsahuje zložky, ktoré sa v skutočnom signáli nenachádzajú. Hoci sa tento problém dá do istej miery riešiť použitím okien, ich voľba nie je úplne jasná. Ďalším problémom je nízke frekvenčné rozlíšenie, ak je záznam signálu príliš krátky.

Iste by sme ocenili matematický nástroj, ktorý by bol schopný uvedené problémy obísť. Sú ním funkcie anglicky nazývané *Prolate Spheroidal Wave Functions* (PSWF). Hoci detailné teoretické základy ich použitia položili Slepian a Pollak už v roku 1961 [1], donedávna bola metóda využívaná skôr výnimočne a to hlavne kvôli zložitosti výpočtu PSWF.

2 PRINCÍP FREKVENČNE OBMEDZENEJ EXTRAPOLÁCIE

Predpokladajme, že by sme radi získali spektrum signálu

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (1)$$

ale máme k dispozícii len signál

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } |t| \leq T/2, \\ \text{nedef.} & \text{pre } |t| > T/2. \end{cases} \quad (2)$$

Každá extrapolačná metóda je založená na nejakom apriórnom predpoklade. Naším predpokladom bude, že spektrum je konečné

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pre} \quad |\omega| > \Omega, \quad (3)$$

čo vôbec nie je odtrhnuté od reality. Už pri samotnom vzorkovaní signálu predpokladáme, že jeho spektrum je konečné. V skutočnosti existuje množstvo signálov, pri ktorých sa dopustíme len veľmi malej chyby, ak o nich utvoríme takýto predpoklad. [2]

Jednou zo špeciálnych vlastností PSWF je, že majú dva intervaly ortogonalite $(-\infty, \infty)$ a $\langle -T/2, T/2 \rangle$. Pre všetky reálne t môžeme $f(t)$ aproximovať konečným radom PSWF v tvare

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(c, t). \quad (4)$$

Vďaka dvojitej ortogonalite pre signály spĺňajúce (3) platí

$$a_n = \sqrt{\lambda_n(c)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_n(c, t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \psi_n(c, t) dt, \quad (5)$$

kde $1 > \lambda_0(c) > \lambda_1(c) > \dots > 0$ a $2c = T\Omega$. Vidno, že si môžeme vybrať interval, na ktorom budeme počítať koeficienty a_n . Smozrejme, že kvôli tvaru $g(t)$ pôjde o interval pozorovania $\langle -T/2, T/2 \rangle$.

3 NUMERICKÝ VÝPOČET KOEFICIENTOV RADU PSWF

K získaniu $f_N(t)$ nám chýba už len posledný krok – čo najpresnejšie vyčíslenie určitého integrálu (5). Komplikuje nám ho skutočnosť, že obvyčajne máme k dispozícii len K vzoriek signálu tvoriacich vektor

$$\vec{g} = [g(t_1) \ g(t_2) \ \dots \ g(t_K)]^T, \quad \{t_k\}_{k=1}^K \subset \langle -T/2, T/2 \rangle. \quad (6)$$

Priebeh $g(t)$ medzi okamihmi vzorkovania musíme nejakým spôsobom dodefinovať. Napríklad Devasia a Cada v článku [3] demonštrovali pozoruhodné extrapolačné výsledky pri aproximácii integrandu polynómom vysokého rádu (až 250) tak, že interpolovali \vec{g} . Stále však zostala nezodpovedaná otázka, čo sa stane, ak bude $g(t)$ obsahovať šum.

Zamerali sme sa na prípady, kedy signál obsahuje biely šum s energiou rádovo aspoň 10^{-3} energie $g(t)$ a dospeli sme k záveru, že skutočné signály nie je možné dobre aproximovať polynómami vyšších rádov než asi 20. Po experimentoch s rôznymi metódami numerickej integrácie a ladením ich parametrov sme si položili otázku: Nebolo by jednoduchšie upustiť od zaužívaného postupu závislého na výpočte integrálu a namiesto toho preložiť známe vzorky signálu radom $f_N(t)$ použitím metódy najmenších štvorcov? Nielen, že to je jednoduchšie, ale dokonca aj výsledky metódy môžu byť presnejšie. Ak zostavíme nasledujúce matice

$$\Psi_{N,K} = \begin{bmatrix} \psi_0(t_1) & \psi_0(t_2) & \dots & \psi_0(t_K) \\ \psi_1(t_1) & \psi_1(t_2) & \dots & \psi_1(t_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(t_1) & \psi_N(t_2) & \dots & \psi_N(t_K) \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix},$$

budeme môcť súčet kvadratických odchýlok $f_N(t)$ od $g(t)$ v bodoch vzorkovania zapísať nasledovne

$$J(\vec{a}) = (\vec{g} - \Psi_{N,K}^T \cdot \vec{a})^T \cdot (\vec{g} - \Psi_{N,K}^T \cdot \vec{a}). \quad (7)$$

Nie je ťažké ukázať, že $J(\vec{a})$ má minimum práve v bode

$$\vec{a} = (\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T)^{-1} \cdot \Psi_{N,K} \cdot \vec{g}. \quad (8)$$

Ak je K dostatočne veľké, vďaka ortogonalite PSWF je matica $\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T$ blízka jednotkovej matici násobenej koeficientom $(K-1)/T$. To uľahčuje výpočet inverzie. Vzťahu (8) môžeme rozumieť aj

tak, že súčin $\Psi_{N,K} \cdot \vec{g}$ reprezentuje Newtonovu-Cotesovu metódu (NCM) nultého rádu (obdĺžnikové integračné pravidlo) a inverzia matice zabezpečuje korekciu ňou získaných koeficientov. Pri konkrétnych (teoreticky generovaných, ale aj prakticky meraných) signáloch, sme vypožorovali, že výsledky uvedeného vzťahu sú podobné, ako výsledky NCM s optimálne nastaveným rádom. Lenže optimálny rád NCM závisí na tvare signálu a dopredu sa nedá presne odhadnúť, preto navrhujeme použitie vzťahu (8) namiesto NCM. Porovnanie oboch metód na konkrétnom signáli uvádzame v časti 5.

4 PRAKTICKÁ REALIZÁCIA

Získanie funkčných hodnôt $\psi_n(t)$ je výpočtovo veľmi náročné a obyčajne sa realizuje prostredníctvom konečného radu iných špeciálnych funkcií. Pre ich generovanie sme využili voľne dostupný softvér [4]. Na priemernom osobnom počítači trvá generovanie $\psi_n(c,t)$ pre jedno n a tisíce bodov vzorkovania t niekoľko minút. Napriek tomu je vyššie popísaný extrapolačný postup realizovateľný v reálnom čase, ak počas chodu nežiadame zmeny parametrov c a N . V pamäti môžeme mať uloženú extrapolačnú maticu

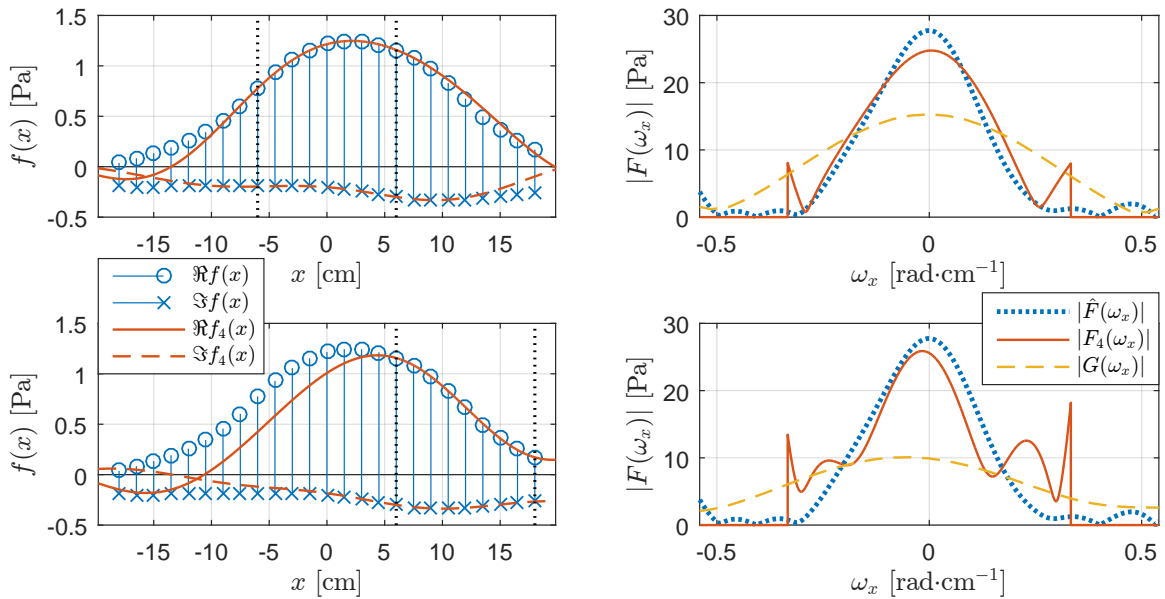
$$E = \Psi_{N,L}^T \cdot (\Psi_{N,K} \cdot \Psi_{N,K}^T)^{-1} \cdot \Psi_{N,K}, \quad (9)$$

kde $\Psi_{N,L}$ obsahuje vzorky v $|t| > T/2$. Extrapolovaný signál získame vykonaním jedinej maticovej operácie $\vec{f}_N = E \cdot \vec{g}$. Podobne vieme zostaviť transformačnú maticu P pre výpočet spektra $\vec{F} = P \cdot \vec{g}$.

5 OVERENIE NA MERANÝCH DÁTACH

Jednou z možných aplikácií vyššie popísaného extrapolačného postupu je akustická holografia. [5] Pri nej sa mikrofónovým poľom získava záznam akustického tlaku $p(x,y,\tau)$, kde x, y sú priestorové súradnice a τ označuje čas. Ak má zdroj zvuku známu frekvenciu, môžeme Fourierovým radom z $p(x,y,\tau)$ určiť amplitúdu tlaku $g(x,y)$. Pre ďalšiu analýzu býva žiadúce určiť dvojrozmernú Fourierovu transformáciu $g(x,y)$, ale narážame na problém, že $g(x,y)$ je len časťou nejakého signálu $f(x,y)$.

Pre zachovanie prehľadnosti si ukážeme zjednodušený jednorozmerný prípad $p(x,\tau)$ a $g(x)$. Harmonický zdroj zvuku o frekvencii 1 kHz umiestnený vo vzdialenosti 5 cm od mikrofónového poľa bol zaznamenaný v 25-tich bodoch na osi x s rozstupmi 1,5 cm. Fourierovým radom sme z $p(x,\tau)$ určili amplitúdy akustického tlaku v jednotlivých mikrofónoch, čím sme dostali komplexný signál $f(x)$.



Obr. 1: Porovnanie $f(x)$ s radom $f_4(x)$ a ich spektier.

Predpokladajme, že máme k dispozícii len signál \vec{g} z deviatich mikrofónov (na obrázku vyššie ohraňených prerušovanou čiarou) a snažíme sa ho extrapolovať radom $f_4(x)$ pri voľbe $c = 2$. (Pre $n > 4$ sú a_n chybné kvôli šumu.) Signál sme extrapolovali pre dva prípady \vec{g}_A (hore) a \vec{g}_B (dolu). Označme symbolom Δ strednú kvadratickú odchýlku extrapolovaného priebehu od skutočného signálu

$$\Delta = \sqrt{(\vec{f} - \Psi_{4,25}^T \cdot \vec{a})^T \cdot (\vec{f} - \Psi_{4,25}^T \cdot \vec{a}) / 25}. \quad (10)$$

	MNŠ	NCM r. 0	NCM r. 1	NCM r. 2	NCM r. 4	NCM r. 8
Δ_A [Pa]	0,108	44,6	11,64	0,149	0,141	0,104
Δ_B [Pa]	0,248	30,4	8,01	0,202	0,284	0,428

Tabuľka 1: Porovnanie MNŠ a NCM na základe odchýlok extrapolácie signálov A a B

Pre výpočet koeficientov \vec{a} sme použili aj metódu najmenších štvorcov (MNŠ), aj NCM rôznych rádov. Tabuľka 1 ukazuje, že optimálny rád NCM závisí od signálu, a to nie je výhodné. MNŠ dosahuje veľmi malú chybu bez nastavovania parametra. Pre lepšiu predstavu o dosiahnutom rozlíšení v spektre uvádzame na Obr. 1 (vpravo) spektrum $\tilde{F}(\omega_x)$ získané využitím všetkých 25-tich vzoriek, spektrum $G(\omega_x)$ vypočítané Fourierovým radom zo signálu \vec{g} doplneného nulami a spektrum $F_4(\omega_x) = \mathcal{F}\{f_4(x)\}$. Výsledky sú zaujímavé, v prípadoch A aj B je $F_4(\omega_x)$ blízke $\tilde{F}(\omega_x)$.

6 ZÁVER

V práci sme prakticky aplikovali PSWF pri extrapolácii skutočných signálov. Zistili sme, že voľba rádu NCM má zásadný vplyv na kvalitu extrapolácie. Naším prínosom je odstránenie potreby nastavovať rád NCM a to tak, že sme ju nahradili MNŠ. Demonštrovali sme použiteľnosť algoritmu na skutočných dátach a iste nájde uplatnenie aj pri iných signáloch, ktoré približne spĺňajú podmienku (3). Uvedená metóda totiž umožňuje dosiahnuť vyššie rozlíšenie v spektre, než diskretná Fourierova transformácia s oknami. Priaznivá je aj skutočnosť, že celý nami navrhnutý extrapoláčny výpočet (prípadne výpočet spektra) sa dá zredukovať na jediné maticové násobenie a môže prebiehať v reálnom čase.

POĎAKOVANIE

Tato publikácia vznikla za podpory grantu číslo FEKT-S-17-4234 – "Průmysl 4.0 v automatizaci a kybernetice" financovaného z Interní grantové agentury Vysokého učení technického v Brně.

LITERATÚRA

- [1] SLEPIAN, David; POLLAK, Henri O. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier analysis and Uncertainty I. *Bell System Technical Journal*. 1961, roč. 40, č. 1, str. 43-63. ISSN 0005-8580.
- [2] SLEPIAN, David. On bandwidth. *Proceedings of the IEEE*, 1976, roč. 64, č. 3, str. 292-300. ISSN 1558-2256.
- [3] DEVASIA, Amal; CADA, Michael. Bandlimited Signal Extrapolation Using Prolate Spheroidal Wave Functions. *IAENG International Journal of Computer Science*. 2013, roč. 40, č. 4, str. 291-300. ISSN 2078-0966.
- [4] ADELMAN, R. et al. 2014 Software for Computing the Spheroidal Wave Functions Using Arbitrary Precision Arithmetic. arXiv 1408.0074.
- [5] NAYBARD, D.; WILLIAMS, J; LEE, Y. Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1985, roč. 78, č. 4, str. 1395-1413. ISSN 0001-4966.